Diferencijabilnost funkcija

Definicija 1 *Neka je funkcija f definisana na* <u>*otvorenom*</u> *skupu $E \subset \mathbb{R}^n$. Funkcija f je* **diferenijabilna u tački** *$x \in E$ ako postoji linearna funkcija*

$$L(x,h) = \sum_{i=1}^{n} L_i h_i, \quad h = (h_1, \dots, h_n), \quad \{L_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R},$$

tako da priraštaj $\Delta f(x,h)$ funkcije f u tački x možemo prikazati kao

$$\Delta f(x,h) = f(x+h) - f(x) = L(x,h) + o(\|h\|), \quad \|h\| \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Funkcija $L(x,h) = \sum_{i=1}^{n} L_i h_i$ je **diferencijal funkcije f u tački** *x koji se označava sa $df(x)$.*

- Zamenom h_i sa dx_i, $i = \overline{1,n}$, diferencijal funkcije f najčešće predstavljamo u obliku

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i dx_i = L_1 dx_1 + \dots + L_n dx_n.$$

- Iz (1) zaključujemo da je funkcija f je diferencijabilna u tački $x \in E$ ako i samo ako postoji linearna funkcija $L(x,h)$ tako da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x,h) - L(x,h)}{\|h\|} = 0 \quad \text{odnosno} \tag{2}$$

$$\Delta f(x,h) = L(x,h) + \varepsilon(x,h) \cdot \|h\|, \tag{3}$$

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(x,h) = 0. \tag{4}$$

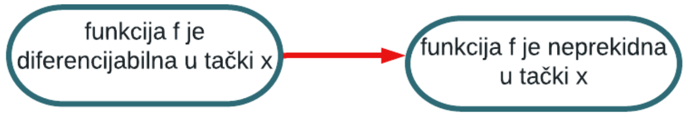
- Funkcija ε nije definisana za $h = 0$. Definišimo funkciju

$$\alpha(x,h) := \varepsilon(x,h) \cdot \|h\|. \tag{5}$$

Lema 1 *Uslovi* (4) *i* (5) *ekvivalnetni su sa*

$$\alpha(x,h) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x,h) \cdot h_i, \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon_i(x,h) = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Stav 1 *Ako je funkcija f diferencijabilna u nekoj tački x_0* <u>*otvorenog*</u> *skupa $E \subset \mathbb{R}^n$, onda je ona neprekidna u toj tački.*



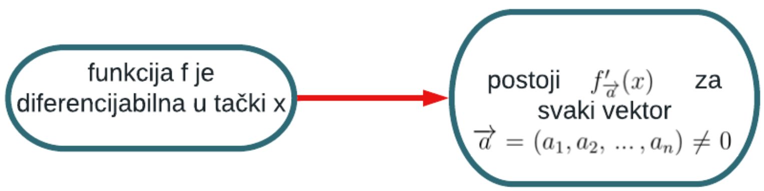
Stav 2 *Neka je funkcija f diferencijabilna u nekoj tački x otvorenog skupa $E \subset \mathbb{R}^n$. Tada za svaki vektor $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$ postoji $f'_{\overrightarrow{a}}(x)$. Štaviše, za svako $i = \overline{1,n}$ postoje parcijalni izvodi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ i pri tome je $L_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ odnosno*

$$df(x) = L(x,a) = f'_{\overrightarrow{a}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot a_i.$$

Posledica 1 *Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x, onda je diferencijal te funkcije jednoznačno određen u toj tački i važi*

$$df(x) = f'_{\overrightarrow{a}}(x),$$

gde je $\overrightarrow{a} \neq 0$ proizvoljan vektor.



♣ Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x, onda je diferencijal te funkcije f u tački x određen sa

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n.$$

Teorema 1 *Neka je funkcija f definisana na otvorenom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$. Ako funkcija f ima parcijalne izvode u nekoj okolini tačke $x \in E$ i ako su oni neprekidne funkcije u toj tački, onda je funkcija f diferencijabilna u tački x.*

Posledica 2 *Ako funkcija f definisana na otvorenom skupu $E \subset \mathbb{R}^n$ ima neprekidne parcijalne izvode na skupu E, onda je ona neprekidna na tom skupu.*

Definicija 2 *Za funkciju f kažemo da je* **neprekidno diferencijabilna na skupu** *E ako u svim tačkama skupa E ima neprekidne parcijalne izvode.*

Skup svih neprekidno diferencijabilnih funkcija na skupu E označavamo sa $\mathcal{C}^1(E)$. Očigledno važi $\mathcal{C}^1(E) \subset \mathcal{C}(E)$.

Teorema 2 (Izvod složene funkcije) *Neka je funkcija* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferencijabilna u tački* $x_0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in intE \subset \mathbb{R}^n$. *Ako za funkciju* $g = (g_1, ..., g_n) : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \longrightarrow E$, *pri čemu je* $g_i(t_0) = x_i^0$, $i = \overline{1, n}$, *postoji* $g_i'(t_0)$ *za svako* $i = \overline{1, n}$, *tada složena funkcija* $h(t) = f(g(t))$ *ima izvod u tački* t_0 *i važi*

$$h'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} g_i'(t_0).$$

Posledica 3 *Neka je funkcija* f *diferencijabilna u nekoj tački* $x_0 \in intE_x$, $E_x \subset \mathbb{R}_x^n$. *Ako za funkciju* $g = (g_1, ..., g_n) : E_t \longrightarrow E_x$, $E_t \subset \mathbb{R}_t^m$, *postoje parcijalni izvodi* $\dfrac{\partial g_i}{\partial t_k}$ *u tački* $t_0 \in intE_t$ *za svako* $k = \overline{1, m}$ *i svako* $i = \overline{1, n}$, *pri čemu je* $g_i(t_0) = x_i^0$, *tada složena funkcija* $h(t) = f(g(t))$ *ima parcijalne izvode u tački* t_0 *koji su dati izrazima*

$$\frac{\partial h(t_0)}{\partial t_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial g_i(t_0)}{\partial t_k}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Primetimo da se u prethodnim tvrđenjima uslov diferencijabilnosti funkcije f ne može oslabiti.

Teorema 3 (Invarijatnost forme prvog diferencijala) *Neka je funkcija* f *definisana na skupu* $E \subset \mathbb{R}_x^n$ *i diferencijabilna u tački* $x_0 \in intE$. *Ako su funkcije* x_i, $i = \overline{1, n}$, *definisane na skupu* $F \subset \mathbb{R}_t^m$ *i diferencijabilne u tački* $t_0 \in intF$, *pri čemu je* $x_0 = x(t_0) = (x_i(t_0))$, *tada je složena funkcija* $f(x(t))$ *definisana u nekoj okolini tačke* t_0, *diferencijabilna je u* t_0 *i diferencijal te funkcije u tački* t_0 *može se pretstaviti u jednom od sledećih oblika*

(7) $$df = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x(t_0))}{\partial t_j} dt_j,$$

(8) $$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0))}{\partial x_i} dx_i, \quad gde \quad je \quad dx_i = dx_i(t_0), \quad i = \overline{1, n}.$$

Formule (7) i (8) dobijaju se na formalno isti način, kao sume proizvoda parcijalnih izvoda i odgovarajućih diferencijala. Suštinski, te formule se razlikuju po tome, što su dt_j diferencijali nezavisno promenljivih, a dx_i su diferencijali funkcija. Upravo opisano svojstvo predstavlja **invarijantnost forme prvog diferencijala**.

Invarijantnost forme prvog diferencijala često se koristi pri praktičnom izračunavanju diferencijala složenih funkcija. Korišćenjem formule (8) lako se dokazuju sledeće formule diferenciranja:

(i) $d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(ii) $d(fg) = gdf + fdg$,

(iii) $d(f/g) = (gdf - fdg)/g^2$.

Parcijalni izvodi višeg reda

Neka je $E \subset \mathbb{R}^m$ otvoren skup, a $\vec{a}$ i $\vec{b}$ fiksirani vektori iz $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Neka funkcija $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ u svakoj tački $x \in E$ ima izvod $f'_{\vec{a}}(x)$ u pravcu vektora $\vec{a}$. Tada je $f'_{\vec{a}} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija definisana u svim tačkama skupa E.

Definicija 3 *Izvod funkcije* $f'_{\vec{a}}$ *u tački* $x \in E$ *u pravcu vektora* $\vec{b}$, *ukoliko postoji, naziva se* **izvod drugog reda funkcije** f **u tački** x **u pravcu vektora** $\vec{a}$ **i** $\vec{b}$ *i označava se sa*

$$f''_{\vec{a}\vec{b}}(x) := (f'_{\vec{a}})'_{\vec{b}}(x).$$

Definicija 4 **Parcijalni izvodi drugog reda funkcije** $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *u tački* $x \in E$ *definišu se kao* $f''_{e_i e_j}(x)$, *gde su* e_i *i* e_j *elementi standardne baze prostora* $\mathbb{R}^m$, *a označavaju se sa*

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \quad \vee \quad f''_{x_i x_j}(x), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Ako je $i \neq j$, *parcijalne izvode nazivamo* **mešovitim parcijalnim izvodima drugog reda**.

Mešoviti izvodi drugog reda u opštem slučaju ne moraju biti jednaki (vidi primer sa vežbi). Prirodno se nameće pitanje određivanja uslova pod kojim su mešoviti izvodi drugog reda jednaki. Odgovor na ovo pitanje daje sledeća teorema.

Teorema 4 *Neka je funkcija* f *definisana na otvorenom skupu* $E \subset \mathbb{R}^m$. *Ako funkcija* f *ima izvode* $f'_{\vec{a}}$ *i* $f'_{\vec{b}}$ *u nekoj okolini tačke* $x \in E$, *gde su* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, *i ako su mešoviti izvodi* $f''_{\vec{a}\vec{b}}$ *i* $f''_{\vec{b}\vec{a}}$ *neprekidne funkcije u tački* x, *onda su oni jednaki u toj tački.*

Definicija 5 *Neka je* $E \subset \mathbb{R}^m$ *otvoren skup. Ako funkcija* f *ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda na skupu* E, *onda za funkciju* f *kažemo da je* **dvaput neprekidno diferencijabilna na skupu** E *i to označavamo sa* $f \in C^2(E)$. *Očigledno važi* $C^2(E) \subset C^1(E) \subset C(E)$.

Definicija 6 **Izvod drugog reda funkcije** $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *u tački* $x \in E$ *je matrica*

$$f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{m}.$$

Ako je $f \in C^2(E)$ i $\vec{a} = (a_1, ..., a_m)$, $\vec{b} = (b_1, ..., b_m)$, tada je

$$f''_{\vec{a}\vec{b}}(x) = f''_{\vec{b}\vec{a}}(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} a_i b_j,$$

pa je matrica kvadratne forme koja daje drugi izvod funkcije f u tački x u pravcu vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ upravo drugi izvod funkcije f u tački x.

Definicija 7 *Realna funkcija* $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *oblika* $\phi(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j$ *je* **kvadratna forma promenljivih** $h_1, ..., h_n$. *Matrica* $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ *naziva se* **matrica kvadratne forme**.

♣ Kvadratna forma je:

- **simetrična** ako je $a_{ij} = a_{ji}$, za svako $i, j = \overline{1, n}$;
- **pozitivno definitna** ako je $\phi(h) > 0$ za svako $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$;
- **negativno definitna** ako je $\phi(h) < 0$ za svako $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$;
- **određena** ako je pozitivno ili negativno definitna;
- **neodređena** ako postoji $x, x' \in \mathbb{R}$, tako da važi $\phi(x) > 0$ i $\phi(x') < 0$.

Neka je $E \subset \mathbb{R}^m$ otvoren skup i neka su $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ vektori iz $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Pretpostavimo da je za svako $x \in E$ određen izvod funkcije f u tački x $(n-1)$-vog reda u pravcu vektora $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a}_{n-1}$ u oznaci

$$f^{(n-1)}_{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a}_{n-1}}(x).$$

Definicija 8 **Izvod n-tog reda funkcije** *f u tački $x \in E$ po pravcu vektora $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ je izvod*

$$f^{(n)}_{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}}(x) := (f^{(n-1)}_{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a}_{n-1}})'_{\vec{a_n}}(x),$$

ukoliko postoji.

Ako su vektori $\vec{a_i}$ elementi standardne baze, onda izvod n-tog reda po pravcima vektora $\vec{e_{i_1}}, \dots, \vec{e_{i_n}}$ standardne baze prostora $\mathbb{R}^m$ nazivamo **parcijalnim izvodom funkcije** f **n-tog reda** po argumentima $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$, $i_1, ..., i_n \subset \{1, ..., m\}$ i označavamo sa

$$f^{(n)}_{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}}(x) \quad \vee \quad \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}}.$$

Sa $C^n(E)$ označavamo skup funkcija čiji su svi parcijalni izvodi zaključno do n-tog reda neprekidne funkcije na skupu E. Očigledno je $C^n(E) \subset \ldots \subset C^1(E) \subset C(E)$.

Diferencijali višeg reda

Definicija 9 *Funkcija* f *je* n-**puta diferencijabilna u tački** $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ *ako su svi parcijalni izvodi zaključno do* $(n-1)$*-vog reda diferencijabilne funkcije u tački* x_0*.*

Ako je $f \in C^2(E)$, $E \subset \mathbb{R}^m$, tada ima smisla razmatrati diferencijal funkcije $df(x) = f'_{\vec{a}}(x)$:

$$
\begin{aligned}
(9) \qquad d(df(x)) &= d\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} a_i\right) = \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} a_i\right) = \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) a_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) a_j\right) a_i = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} a_i\, a_j.
\end{aligned}
$$

Poslednja suma u (9) je **diferencijal drugog reda funkcije** f u tački x. Zamenjujući a_i sa dx_i , vidimo da je drugi diferencijal kvadratna forma promenljivih dx_i:

$$
(10) \qquad d^2 f(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j.
$$

Jasno je da važi $d^2 f(x) = f''_{\vec{a}\vec{a}}(x)$.

Induktivno se definiše n-ti diferencijal funkcije f u tački x kao $d^n f(x) := d(d^{n-1} f)(x)$ ili

$$
d^n f(x) := d(f^{(n-1)}_{\vec{a},\dots,\vec{a}})(x) = (f^{(n-1)}_{\vec{a},\dots,\vec{a}})'_{\vec{a}}(x) = f^{(n)}_{\vec{a},\dots,\vec{a}}(x),
$$

naravno, pod pretpostavkom da je $f \in C^n(E)$.

Za $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$ indukcijom se može dokazati da je

$$
d^n f(x) = f^{(n)}_{\vec{a},\dots,\vec{a}}(x) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{m} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} a_{i_1} \cdots a_{i_n}.
$$

Uvedimo oznaku koju ćemo kasnije koristiti

$$
f^{(n)}(x) a^n := f^{(n)}_{\vec{a},\dots,\vec{a}}(x) = d^n f(x).
$$

Izraz (10) se može prikazati kao

$$
d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 f.
$$

Indukcijom se može dokazati da je

$$
d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^n f.
$$

Pretpostavimo da je funkcija f definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^m$, da su funkcije $x_i = x_i(t_1, ..., t_p)$, $i = \overline{1, m}$, definisane na skupu $E_t \subset \mathbb{R}^p$, i da složena funkcija ima smisla. Za funkcije f i x_i pretpostavimo da su dvaput neprekidno diferencijabilne na odgovarajućim skupovima. Na osnovu teoreme o invarijantnosti forme prvog diferencijala je

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad \text{gde je} \quad dx_i = dx_i(t), \quad i = \overline{1, m}.$$

Diferencijal drugog reda funkcije f je sada

$$\begin{aligned} d^2 f &= d\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left[d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} d^2 x_i \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} d^2 x_i. \end{aligned}$$

Iz poslednjeg izraza vidimo da diferencijal višeg reda složene funkcije u opštem slučaju nema svojstvo invarijantnosti forme. Ako su $x_i(t)$ linearne funkcije, onda diferencijali višeg reda zadžavaju formu, jer je u tom slučaju očigledno $d^k x_i(t) = 0$ za $k \geq 2$.

Tejlorova formula

Teorema 5 *Neka je $f \in C^n(E)$, gde je $E \subset \mathbb{R}^m$ otvoren i konveksan skup. Ako je $x \in E$ i $a \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ vektor za koji $x + a \in E$, tada postoji $\theta \in (0, 1)$ tako da je*

$$\Delta f(x) = f(x + a) - f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)\, a^k + r_{n-1}(x, a),$$

gde je $r_{n-1}(x, a) = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(x + \theta a)\, a^n$.